Kuratowski-Zorn-Lemma (KZL): Jede nichtleere Partialordnung $(X, \leqslant)$, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, besitzt ein maximales Element.

Anwendung Betrachte einen Körper K und einen K-Vektorraum V.

Satz: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $L \subseteq E$ existiert eine Basis B von V mit $L \subseteq B \subseteq E$.

Folge: (a) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V. Fall $L = \emptyset$.

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V erweitern. Fall $E = V$

(c) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. $L = \emptyset$ und $E = V$

Beispiel: Der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ hat eine Basis.

Beispiel: $\mathbb{R}$ hat eine Basis als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Bew.: Sei S die Menge aller $B \subseteq E$ mit $L \subseteq B$ und B lin. unabh.
mit der von $\subseteq$ induzierten Partialordnung.
Wegen $L \in S$ ist $S \neq \emptyset$.
Sei $C \subseteq S$ eine Kette. Setze $B := L \cup \bigcup C$
Dann ist $B \subseteq E$ und $L \subseteq B$.
Seien $b_1, \dots, b_n \in B$ und $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} \kappa_i b_i = 0$.
Für jedes i existiert ein $B_i \in C \cup \{L\}$ mit $b_i \in B_i$.
$\Rightarrow \exists j$ mit $B_i \subseteq B_j$ für alle i.
Dann ist $\sum_{i=1} \kappa_i b_i = 0$ eine Relation in B_j.
B_j lin. unabh. $\Rightarrow$ alle $\kappa_i = 0$,

Also ist B lin. unabh.,
also $B \in S$ und eine obere Schranke für C.

Zorn $\Rightarrow \exists$ maximales Element $\tilde{B} \in S$.
Wäre $\langle \tilde{B} \rangle \neq V$, wähle $v \in V \setminus \langle \tilde{B} \rangle$.
Schreibe $v = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$ für $e_i \in E$ und $y_i \in K$.
$\Rightarrow \exists i : e_i \notin \langle \tilde{B} \rangle$.
Dann ist $\tilde{B} \cup \{e_i\}$ lin. unabh.
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Maximalität von $\tilde{B}$.
Also ist $\tilde{B}$ ein Erz.syst. von $V \Rightarrow$ Basis. qed.

Kardinalität

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 6],
[Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §3, Kap. IX]
[Analysis-Skript, Anhang A.1]

Grundsätzlich verwenden wir ZFC, auch wenn nicht alle Argumente das Auswahlaxiom benötigen.

Definition: Für Mengen x und y setzen wir

$$\begin{array}{ll} x \preceq y & \text{falls eine injektive Funktion } x \hookrightarrow y \text{ existiert,} \\ x \sim y & \text{falls eine bijektive Funktion } x \overset{\sim}{\to} y \text{ existiert,} \\ x \prec y & \text{falls } x \preceq y \text{ und } x \not\sim y \text{ gilt.} \end{array}$$

$S: \omega \to \omega$ injektiv, nicht surjektiv.

Proposition: Die Relation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv, und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

$\mathrm{id}: X \to X \Rightarrow X \sim X.$

$x \hookrightarrow y \hookrightarrow z$

$x \hookrightarrow z$

Satz: *(Cantor-Bernstein)* Für alle x und y gilt

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \longleftrightarrow x \sim y.$$

D.h.: $\exists\, x \hookrightarrow y \hookrightarrow x \iff \exists\, x \overset{\sim}{\hookrightarrow} y.$

Beweis: „$\Leftarrow$" klar.

Für „$\Rightarrow$" betrachte Injektionen: $A \xhookrightarrow{f} B \xhookrightarrow{g} A$.

Setze $A_0 := A$ und $A_{n+1} := g(f(A_n))$ für alle $n \geq 0$, sowie $A_\infty := \bigcap_{n \geq 0} A_n$ $\Rightarrow A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_\infty$

u. $B_0 := B$ und $B_{n+1} := f(g(B_n))$ - - - - - - - - $B_\infty := \bigcap_{n \geq 0} B_n$ $\Rightarrow B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots \supseteq B_\infty$.

Für alle $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \supseteq & A_n \arrow[drr, "f"', "\sim"] & \supseteq & g(B_n) \arrow[drr, "f"', "\sim"] & \supseteq & A_{n+1} \arrow[drr, "f"', "\sim"] & \supseteq & \cdots & \\
\cdots \supseteq & B_n & \supseteq & f(A_n) & \supseteq & B_{n+1} & \supseteq & f(A_{n+1}) & \supseteq \cdots
\end{tikzcd}$$

$f(A_n) = \{f(a) \mid a \in A_n\}$

Also induziert f eine Bijektion $A_n \setminus g(B_n) \xrightarrow{\sim} f(A_n) \setminus B_{n+1}$.

Analog induziert g eine Bijektion $B_n \setminus f(A_n) \xrightarrow{\sim} g(B_n) \setminus A_{n+1}$.

Und f induziert eine Bijektion

$$\begin{tikzcd}
A_\infty \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & B_\infty \arrow[d, equal] \\
\bigcap_{n \geq 0} A_n \arrow[r, "\sim"] & \bigcap_{n \geq 0} f(A_n) = \bigcap_{n \geq 0} B_n
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd}
A = \dot{\bigcup}_{n \geq 0} A_n \setminus g(B_n) \arrow[d, "f", "\wr"'] & \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{n \geq 0} g(B_n) \setminus A_{n+1} \arrow[d, "g^{-1}", "\wr"'] & \dot{\cup}\, A_\infty \arrow[d, "\wr"'] \\
B = \dot{\bigcup}_{n \geq 0} f(A_n) \setminus B_{n+1} & \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{n \geq 0} B_n \setminus f(A_n) & \dot{\cup}\, B_\infty
\end{tikzcd} \Bigg\} \text{ Bijektion } A \to B.$$

qed

Satz: Für alle x und y gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

Beweis: Sei $S := \{ F \subset x \times y \mid \forall \langle a,b\rangle, \langle a',b'\rangle \in F : a = a' \Leftrightarrow b = b' \}$.

Jedes $F \in S$ ist der Graph einer Bijektion $x' \to y'$ für Teilmengen $x' \subseteq x$ und $y' \subseteq y$.

$\emptyset \in S$ also ist $S \neq \emptyset$.

S partialgeordnet durch $\subseteq$.

Für jede Kette $K \subseteq S$ ist $\bigcup K \in S$ eine obere Schranke von K.

Zu zeigen!

Für $\langle a,b\rangle \in \bigcup K$ wähle $F \in K$ mit $\langle a,b\rangle \in F$.
$\langle a',b'\rangle$ .. .. .. F' --- -- $\langle a',b'\rangle \in F'$.
Dann ist $F \subseteq F'$ oder $F' \subseteq F$.
....

Zorn $\Rightarrow$ $\exists$ max. Element $F \in S$.

Sei F der Graph einer Bijektion $x' \to y'$ für $x' \subseteq x$ und $y' \subseteq y$.

Ist $x' = x$ so ist $x \xhookrightarrow{f} y \Rightarrow x \preceq y$

Ist $y' = y$ so ist $y \xhookrightarrow{f^{-1}} x \Rightarrow y \preceq x$.

Sonst existieren $a \in x \setminus x'$, $b \in y \setminus y'$ und $F \cup \{\langle a,b\rangle\} \in S$ echt größer. $\Rightarrow$ Widerspruch.

qed.

Endliche Mengen

Proposition 1: Für alle $m, n \in \omega$ ist $m \sim n$ äquivalent zu $m = n$.

Beweis: „$\Leftarrow$" klar. Für „$\Rightarrow$" setze $\varphi(m) := (\forall n \in \omega : m \sim n \to m = n)$.

$m = 0$: Ist $\emptyset = 0 \sim n$, so folgt $n = \emptyset = 0 = m$. Also gilt $\varphi(0)$.

Nun gelte $\varphi(m)$. Sei $n \in \omega$ mit $Sm \sim n$.

D.h. $\exists$ Bijektion $f : Sm \xrightarrow{\sim} n$.

Wegen $Sm \neq 0$ ist $Sm \neq \emptyset \Rightarrow n \neq \emptyset \Rightarrow n \neq 0$. Schreibe $n = Sn'$ mit $n' \in \omega$.

$f : \begin{array}{l} Sm = m \cup \{m\} \\ \to Sn = n' \cup \{n'\} \end{array}$

Sei g die Bijektion $Sn' \to Sn'$, die $f(m)$ und n' vertauscht und alle anderen festlässt. $\Rightarrow g \circ f : Sm \to Sn$ Bijektion mit $(g \circ f)(m) = n'$.

$\Rightarrow g \circ f | m$ Bijektion $m \to n'$.

Also ist $m \sim n' \xRightarrow[\varphi(m)]{} m = n' \Rightarrow Sm = Sn' = n$. Also gilt $\varphi(Sm)$.

Induktion $\Rightarrow \forall m : \varphi(m)$. qed

Proposition 2: Für jedes $n \in \omega$ und jede echte Teilmenge $x \subsetneq n$ existiert $m \in \omega$ mit $m < n$ und $x \sim m$.

Beweis: Induktion über n.

$n = 0$: $n = \emptyset$ ✓

Gilt die Aussage für n, und ist $x \subsetneq Sn$, wähle $m \in Sn \setminus x$.

Sei g die Bijektion $Sn \to Sn$, die m und n vertauscht und die übrigen Punkte festlässt.

$Sn = n \cup \{n\}$

$\Rightarrow x \xrightarrow[g]{\sim} g(x) \subseteq n$.

Fall $g(x) = n \Rightarrow n < Sn$ und $x \sim n$.

Fall $g(x) \subsetneq n \xRightarrow{\text{Aussage für } n} \exists m \in \omega : m < n \wedge x \sim m. \Rightarrow m < Sn$ und $x \sim m$.

qed.

Satz: Für jede Menge x sind äquivalent:

- (a) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Bijektion $n \xrightarrow{\sim} x$.
- (b) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Injektion $x \hookrightarrow n$.
- (c) Es existiert ein $n \in \omega$ mit einer Surjektion $n \twoheadrightarrow x$.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (b) ✓

(b) Sei $x \hookrightarrow n$. Ist die Bijektion, so folgt (a).
Sonst ist $x \xrightarrow{\sim} x' \subsetneq n. \xRightarrow{\text{Prop. 2}} \exists m: x' \sim m \Rightarrow x \sim m.$ $\Big] \Rightarrow$ (a).

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Ü.

qed

Definition: Eine Menge x mit den obigen Eigenschaften heisst *endlich*, andernfalls *unendlich*.

Folge: Für jede endliche Menge x existiert genau ein $n \in \omega$ mit $n \sim \cancel{\omega}$. x

Prop. 1.

Definition: Dieses n heisst die *Kardinalität von x*, geschrieben $|x| := n$.

Folge: Für jede endliche Menge x und jede echte Teilmenge y gilt $|y| < |x|$.

Bew.:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & x \\ f^{-1}(y) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] & n \arrow[u, "\wr", "f"'] \end{tikzcd}$$

$y \sim f^{-1}(y) \sim m < n$ nach Prop 2.

$\Rightarrow |y| = m < n = |x|.$

qed

Unendliche Mengen

Proposition: Für jede Menge x sind äquivalent:

(a) x ist unendlich.
(b) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.
(c) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.
(d) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.
(e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.
(f) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.

Beweis: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (e). Rest Ü.

(c) $\Rightarrow$ (e) Sei $\omega \xhookrightarrow{f} x$. Damit

$$\begin{tikzcd}
x = f(\omega) \arrow[d, "g"'] & \dot\cup & (x \setminus f(\omega)) \arrow[d, "id"] \\
x = f(\omega) & \dot\cup & (x \setminus f(\omega))
\end{tikzcd}$$

mit $f(\omega) \xrightarrow{*} f(\omega)$.

$$\begin{tikzcd}
f(n) \arrow[d, mapsto, "*"'] \\
f(Sn)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow g$ injektiv, nicht surjektiv, weil $f(0) \notin g(x)$.

(e) $\Rightarrow$ (a) Wäre $x \sim n$ für ein $n \in \omega$,
und $g: x \hookrightarrow x$ nicht bijektiv,
wäre $x \sim g(x) \subsetneq x \Rightarrow |x| < |x|$ Widerspruch.

Bleibt: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).